Kompletne kompleksne hiperploskve v krogli prostora C^N

Josip Globevnik

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
IMFM, Ljubljana

Ljubljana, 26.januar 2018

Oznake

- $C^N = \{(z_1, z_2 \cdots, z_N),\; z_j \in C,\; 1 \leq j \leq N\}$ N-dimenzionalen kompleksen prostor
- $B_N = \{(z_1, z_2 \cdots, z_N)\} \colon |z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2 < 1\}$ odprta enotska krogla v C^N
- $\Delta = B_1$ odprt enotski krog v C

Holomorfne funkcije, holomorfne preslikave, prave preslikave

• Naj bo $\Omega \subset C$ odprta množica. **Funkcija** $f : \Omega \to C$ je **holomorfna**, če je na Ω v kompleksnem smislu diferenciabilna, ali, kar je isto, če se da v okolici vsake točke iz Ω razviti v konvergentno potenčno vrsto, t.j. če je analitična

• Naj bo N naravno število in naj bo $\Omega \subset C^N$ odprta množica. **Funkcija** $f : \Omega \to C$ je **holomorfna**, če je na Ω v kompleksnem smislu diferenciabilna, ali, kar je (po Hartogsovem izreku) isto, če je $(z_1, \cdots, z_N) \mapsto f(z_1, \cdots, z_N)$ holomorfna v vsaki spremenljivki posebej.

• Naj bo $\Omega \subset C^N$ odprta množica. **Preslikava** $f : \Omega \to C^M$ **je holomorfna**, če je na Ω v kompleksnem smislu diferenciabilna, ali, kar je isto, če je vsaka komponenta v $f = (f_1, \cdots, f_M)$ holomorfna funkcija na Ω.

• Če je M$\geq N$ je taka preslikava **imerzija**, če je v vsaki točki Ω njen diferencial (ki je linearna preslikava s C^N v C^M) injektiven.

• Imerzija, ki je injektivna, se imenuje **vložitev**.

• naj bo $1 \leq N \leq M$ in $\Omega_1 \subset C^N,\ \Omega_2 \subset C^M$ odprti množici. Zvezna preslikava $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ je **prava preslikava** če je $f^{-1}(K)$ kompaktna množica v Ω_1 za vsako kompaktno množico $K \subset \Omega_2$. Grobo rečeno to pomeni, da iz $z_n \to b\Omega_1$ sledi $f(z_n) \to b\Omega_2$.

Kompleksne hiperploskve

Najenostavnejši primer kompleksne hiperploskve v C^N je kompleksna hiperravnina, t.j. kompleksen podprostor dimenzije $N-1$, naprimer

$$H = \{(z_1, \cdots, z_{N-1}, z_N) \colon z_N = 0\} = C^{N-1} \times \{0\}.$$

Splošnejši primer je graf funkcije h, holomorfne na C^{N-1}

$$\Gamma = \{(z_1, \cdots z_{N-1}, h(z_1, \cdots z_{N-1})),\ z_j \in C,\ 1 \leq j \leq N-1\}$$

• Če je $\Omega \subset C^N$ odprta množica, je zaprto množico $M \subset \Omega$ imenujemo **kompleksna hiperploskev** v Ω če je v okolici vsake svoje točke take sorte,

t.j. če je za vsako točko $z \in M$ mogoče koščček M okoli točke z po zamenjavi koordinatnega sistema v C^N zapisati kot

$\{(z_1, z_2, \cdots z_{N-1}, g(z_1, \cdots, z_{N-1})), (z_1, z_2, \cdots z_{N-1}) \in V\}$ kjer je g holomorfna funkcija na neki odprti množici $V \subset C^{N-1}$.

Za nas posebej pomemben primer kompleksne hiperploskve je pa tale:

Naj bo $N \geq 2$ in naj bo $f\colon B_N \to C$ holomorfna funkcija. Če je c regularna vrednost funkcije f, torej taka, da nivojska množica $\{z \in B_N\colon f(z) = c\}$ne vsebuje kritičnih točk funkcije f, tedaj je ta nivojska množica kompleksna hiperploskev. Po Sardovem izreku izreku je to res za skoraj vsak $c \in f(B_N)$.

Kompletnost

• **Kompleksno hiperploskev** $H \subset \Omega$ imenujemo **kompletna**, če ima vsaka divergentna pot $\gamma\colon [0,1) \to H$ neskončno dolžino, (divergentna pot je taka, pri kateri $\gamma(t)$ zapusti vsako kompaktno podmnožico M ko gre $t \to 1$).

Definirajmo še kompletnost za holomorfne imerzije:

• Naj bo $\Omega \subset C^N$ odprta množica in $M \geq N$. **Holomorfna imerzija** $\varphi\colon \Omega \to C^M$ je **kompletna** če ima za vsako divergentno pot $\gamma\colon [0,1) \to \Omega$ slika $t \mapsto \varphi(\gamma(t)) : 0 \leq t < 1$ neskončno dolžino

Osnovni rezultat, Yangov problem

Osnovni rezultat, o katerem želim govoriti je naslednji

IZREK 0 *Za vsak* $N \geq 2$ *obstaja kompletna zaprta kompleksna hiperploskev v krogli* B_N.

Dokazan je v članku

J.Globevnik: A complete complex hypersurface in the ball of C^N. Annals of Mathematics 182 (2015) 1067-1091

Ta izrek prinese kompletno rešitev naslednjega problema P. Yanga.

PROBLEM (P. Yang (1977)) *Naj bo* $1 \leq k < N$. *Ali obstajata* k*-dimenzionalna kompleksna mnogoterost* M *in* **omejena** *kompletna holomorfna imerzija z* M *v* C^N*?*

V nadaljevanju bom opisal

- nekaj predhodnih rezultatov,
- glavno idejo dokaza Izreka 0
- nekaj kasnejših rezultatov, ki uporabijo podobno idejo.

Predhodni rezultati

Primer $k = 1$ (holomorfne krivulje) je rešil leta 1979 P. Jones, ki je dokazal, da

- obstaja kompletna holomorfna imerzija $f : \Delta \to B_2$
- obstaja kompletna holomorfna vložitev $f : \Delta \to B_3$
- obstaja prava kompletna holomorfna vložitev $f : \Delta \to B_4$

Od tedaj je nastala vrsta rezultatov o omejenih kompletnih holomorfnih krivuljah $(k = 1)$ **imergiranih** v prostor C^2 [F.Martin-M.Umehara-K.Yamada, A. Alarcón - F. J. López, A. Alarcón- F. Forstnerič].

Tako n.pr. velja

IZREK 1 [A. Alarcón - F. Forstnerič , Math.Ann. 2013] *Za vsako končno Riemannovo ploskev z robom obstaja kompletna prava holomorfna imerzija v B_2 in kompletna prava holomorfna vložitev v B_3.*

Ta izrek prinaša kompletne omejene holomorfne krivulje, ki so konstruirane direktno, kot **zaloge vrednosti omejenih holomorfnih preslikav** z Δ v C^N, ali s splošnejših območij ali s končnih Riemannovih ploskev v C^N.

Te preslikave so konstrirane induktivno, z uporabo rezultatov povezanih z Riemann-Hilbertovim problemom, da dobimo potrebno vrtenje in posledično funkcije z dovolj divjim obnašanjem na robu - da dosežemo kompletnost, t.j. da ima slika vsake divergentne poti neskončno dolžino.

Problem najti omejene kompletne **vložene** kompleksne krivulje v primeru $N = 2$ je znatno težji, saj so samopresečisča take krivulje generična in se jih torej ne da odstraniti z majhnimi perturbacijami.

Yangov problem za vložene holomorfne krivulje v C^2 sta rešila A. Alarcón and F. J. López [A. Alarcón - F. J. López: Complete bounded embedded complex curves in C^2. J. Europ. Math. Soc. 18(2016)1675-1705]. ki sta dokazala

IZREK 2 [A. Alarcón and F. J. López] *Vsako konveksno območje v C^2 vsebuje kompletno, s pravo preslikavo vloženo kompleksno krivuljo.*

Za dokaz tega izreka sta Alarcón in López vzela zalogo vrednosti kompletne prave holomorfne imerzije, ki jo da nekoliko posplošen izrek Alarcóna in Forstneriča in potem z zelo delikatnim postopkom skrbno odstranila samopresečne točke zaloge vrednosti, eno po eno z vložitvijo kolobarjev, približno povedano, tako da sta $zw = 0$ zamenjala z $zw = \varepsilon$ kjer je ε zelo majhen in pri tem skrbno pazila, da ne izgubita kompletnosti.

Primer, ko je $k > 1$, preprosta ideja

Moja preprosta ideja, ki je bila, presenetljivo, popolnoma nova v tem kontekstu, je bila:

Ne poskušajmo konstruirati kompletnih zaprtih kompleksnih hiperploskev v B_N kot zaloge vrednosti holomorfnih preslikav, kot je bilo to narejeno za holomorfne krivulje (k=1), ampak kot nivojske množice funkcij f holomorfnih na B_N, t.j. množice oblike $\{z \in B_N \colon f(z) = c\}$ kjer je c konstanta.

Take funkcije bodo seveda morale divje oscilirati ko se približujemo robu bB_N.

Kako dobiti holomorfne funkcije na B_N, ki divje oscilirajo blizu roba?

Konstrukcije na disku

Skicirali bomo kako konstruirati divje oscilirajoče holomorfne funkcije na disku $\Delta = B_1$ ki bodo služile našemu namenu in to na način, ki ga bo mogoče posplošiti na kroglo B_N.

Naj najprej omenimo, da dobro znani Runge-jev izrek pove, da je vsako funkcijo, holomorfno na okolici kompaktne množice $K \subset C$, katere komplement $C \setminus K$ je povezan, mogoče na K enakomerno aproksimirati s polinomi.

Naj bo sedaj Λ premica v C ki seka Δ, in naj bo W majhna njena okolica. (slika)

Naj bo $L < \infty$ in $\varepsilon > 0$. Uporabimo Rungejev izrek za množico $K = [\Lambda \cap \overline{\Delta}] \cup [\overline{\Delta} \setminus W]$, da dobimo polinom Q , za katerega velja

- $\Re Q > L$ on $\Lambda \cap \overline{\Delta}$ in
- $|Q| < \varepsilon$ on $\overline{\Delta} \setminus \mathcal{W}$.

Naj bo sedaj P zaprt konveksen poligon vsebovan v Δ in naj bo $K \subset \mathrm{Int}P$ kompaktna množica. (slika) Uporabimo zgornji razmislek za vsako od premic ki vsebujejo stranice poligona in seštejmo rezultate, da dobimo za vsak $L < \infty$ in vsak $\varepsilon > 0$

polinom Q, za katerega velja

- $\Re Q > L$ povsod na bP razen morda na majhni okolici $\mathcal{U} \subset bP$ množice oglišč poligona P
- $|Q| < \varepsilon$ na K.

Sedaj pa ta razmislek vložimo v induktivni proces. Naj bo P_n zaporedje zaprtih konveksnih poligonov

$$P_1 \subset \mathrm{Int}P_2 \subset P_2 \subset \mathrm{Int}P_3 \subset \cdots \subset \Delta, \quad \cup_{n=1}^{\infty} P_n = \Delta.$$

Za vsak n, naj bo $\mathcal{U}_n \subset bP_n$ majhna okolica množice oglišč poligona P_n in naj bo L_n naraščajoče zaporedje ki konvergira k $+\infty$.

Sedaj pa induktivno konstruiramo zaporedje polinomov Q_n tako, da bo vrsta $\sum Q_n$ konvergirala enakomerno po kompaktih na Δ k funkciji f, holomorfni na Δ in taki, da bo

$$\Re f > L_n \text{ na } \; bP_n \setminus \mathcal{U}_n \; \text{ za vsak } n.$$

Naj bo sedaj $p\colon [0,1) \to \Delta$ pot, za katero je $|p(t)| \to 1$ as $t \to 1$ in na kateri je $\Re f$ omejen. Zaradi lastnosti funkcije f bo morala za vse n od nekje naprej p potekati skozi vsako $\mathcal{U}_n$.
Če znamo izbrati zaporedji P_n in $\mathcal{U}_n$ tako, da ima vsaka taka pot p neskončno dolžino, smo na konju. To je mogoče (morda malo

slike)..

Konstrukcija na krogli

Sedaj bi lahko napravili analogen razmislek v krogli B_n kjer bi zamenjali konveksne poligone s konveksnimi politopi in bi robove poligonov nadomestila lica politopov in bi množico oglišč poligona nadomestili skeleti politopov. To je bilo storjeno v člankih

J.Globevnik: A complete complex hypersurface in the ball of C^N. Ann.Math. 182 (2015) 1067-1091, and
J.Globevnik: Holomorphic functions unbounded on curves of finite length. Math.Ann. 364 (2016) 1343-1359

Tu želimo predstaviti nekoliko drugačno razmišljanje kjer vlogo lic konveksnih politopov prevzamejo tangentne krogle. V posebnem v ravnini bi daljice vsebovane v notranjosti posameznih robov zamenjale daljice, tangentne na krožnice. (slika)

DEFINICIJA *Naj bo* $x \in C^N,\ N \geq 2,\ x \neq 0$. *Naj bo* H *realna afina hiperravnina ki poteka skozi* x *ki je tangentna na sfero* $\{y\colon |y| = |x|\}$ *in naj bo* $\rho > 0$. *Množico*

$$T(x,\rho) = \{y \in H\colon |y - x| \leq \rho\}$$

imenujemo **tangentna krogla s središčem** x **in polmerom** ρ**.**

Torej je $T(x,\rho)$ zaprta krogla polmera ρ v $(2N-1)$-dimenzionalni realni hiperravnini H (slika).

Družine paroma disjunktnih tangentnih krogel vsebovanih v B_N bomo uporabili da zgradimo ovire tako, da bodo morale imeti divergentne poti v B_N, ki se bodo izognile tem kroglam, neskončno dolžino.

Istočasno pa bodo morale biti družine teh krogel primerne za konstrukcijo holomorfnih funkcij katerih realni deli bodo morali biti večji in večji na teh kroglah ko se približujemo robu bB_N.

V ta namen definiramo posebne družine tangentnih krogel, ki jih imenujemo **urejene družine tangentnih krogel**.

DEFINICIJA *Družina* $\mathcal{T}$ *tangentnih krogel v* B_N *se imenuje* **urejena družina** *če obstaja naraščajoče zaporedje* $r_n,\ 0 < r_1 < r_2 < \cdots,\ r_n \to 1$ *ko gre* $N \to \infty$ *tako da*
(i) so središča tangentnih krogel vsebovana v $(r_1 bB_N) \cup (r_2 bB_N) \cup \cdots$
(ii) za vsak n, so tangentne krogle s središči na $r_n(bB_N)$ *paroma disjunktne, imajo isti polmer in so vse vsebovane v* $r_{n+1}B_N$.

Opomba Urejena družina tangentnih krogel vsebuje največ števno mnogo krogel.

Notation Če je $\mathcal{T}$ družina tangentnih krogel, označimo s $|\mathcal{T}|$ unijo vseh krogel iz $\mathcal{T}$.

Predno prikažemo kako uporabimo urejene družine tangentnih krogel v konstrukciji naših holomorfnih funkcij omenimo še naslednjo preprosto propozicijo.

PROPOZICIJA 1 *Naj bosta K_1 and K_2 dve disjunktni kompaktni konveksni množici v $\mathbb{C}^N$, in naj bo $\varepsilon > 0$ in $L < \infty$. Obstaja polinom P na $\mathbb{C}^N$ z vrednostmi v $\mathbb{C}$, tak da velja*

$$\text{(i) } \Re P > L \text{ na } K_1$$
$$\text{(ii) } |P| < \varepsilon \text{ na } K_2.$$

Dokaz Iz predpostavk sledi, da obstajata linearen funkcional φ na C^N in realno število t, da je

$$\Re\varphi < t \text{ na } K_1$$
$$\Re\varphi > t \text{ na } K_2$$

.

Po Rungejevem izreku obstaja polinom $p\colon C \to C$, tak da je

$$\Re p > L \text{ na } \varphi(K_1)$$
$$|p| < \varepsilon \text{ na } \varphi(K_2).$$

Tedaj ima $P = p \circ \varphi$ željene lastnosti. Q.E.D.

Naj bo sedaj
$\mathcal{T}$ urejena družina tangentnih krogel vsebovanih v $B_N, N \geq 2$.
Torej obstaja zaporedje $r_n,\ 0 < r_1 < r_2 < \cdots,\ r_n \to 1$ as $N \to \infty$
tako da velja
(i) središča tangentnih krogel iz $\mathcal{T}$ so vsebovana v
$(r_1 bB_N) \cup (r_2 bB_N) \cup \cdots$
(ii) za vsak n so krogle s središči na $r_n(bB_N)$ paroma disjunktne, imajo isti radij in so vse vsebovane v $r_{n+1} B_N$.

Za $n \in N$ naj bo

$$\mathcal{T}_n = \{T_{n1}, T_{n2}, \cdots, T_{n,m_n}\}$$

družina vseh krogel v $\mathcal{T}$ ki imajo središča na $r_n(bB_N)$.

Če je $T_{nk} \in \mathcal{T}_n$ se konveksna ogrinjača C množice $r_{n-1}\overline{B_N} \cup [\cup\{T_{nj} : 1 \leq j \leq m_n,\ j \neq k\}]$ ne seka z (konveksno množico) T_{nk}
in zato po zgornji propoziciji, za vsak $L < \infty$ in $\varepsilon > 0$, obstaja polinom P na C^N, tak da je $|P| < \varepsilon$ na C in $\Re P \geq L$ na T_{nk}.

Z induktivno uporabo tega lahko ob danem zaporedju $L_n \nearrow \infty$, konstruiramo zaporedje polinomov P_n na C^N tako da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = f$$

konvergira enakomerno po kompaktih v B_N in za vsoto f velja

$$\Re f \geq L_n \text{ na } |\mathcal{T}_n| \text{ za vse } \; n \in N.$$

Sledi

LEMA 1 *Naj bo $\mathcal{T}$ urejena družina tangentnih krogel v B_N kot zgoraj, in za vsak n naj bo $\mathcal{T}_n$ družina tistih krogel iz $\mathcal{T}$ katerih središča so na sferi $r_n bB_N$. Za vsako zaporedje $L_n, \; L_n \to +\infty$, obstaja holomorfna funkcija f na B_N da velja*

$$\Re f \geq L_n \; na \; |\mathcal{T}_n| \; za \; vse \; n \in N.$$

Naslednja, geometrična lema "o ovirah na poti", ki jo rabimo za naš glavni rezultat, je pa pa drugačne vrste in nima zveze s kompleksno analizo. Ob pomanjkanju časa ne bomo nič povedali o njenem dokazu.

LEMA 2 *Naj bo* $N \geq 2$. *Obstaja taka urejena družina* $\mathcal{T}$ *tangentnih krogel vsebovanih v* B_N, *da ima vsaka pot* $p\colon [0,1) \to B_N,\ |p(t)| \to 1$ *as* $t \to 1$, *ki zgreši vse razen morda končno mnogo krogel iz* $T \in \mathcal{T}$, *neskončno dolžino.*

Posledica Leme 1 in Leme 2 je naslednji izrek, ki je glavni rezultat mojega že omenjenega članka J.Globevnik: A complete complex hypersurface in the ball of C^N. Ann.Math. 182 (2015) 1067-1091

IZREK 4 *Naj bo* $N \geq 2$*. Obstaja holomorfna funkcija* f *na* B_N*, za katero je* $\Re f$ *neomejen na vsaki poti končne dolžine s koncem na* bB_N*.*

Torej, če je $p\colon [0,1] \to C^N$ pot končne dolžine, za katero je $|p(t)| < 1$ $(0 \leq t < 1)$ in $|p(1)| = 1$ tedaj je $t \mapsto \Re(f(p(t)))$ neomejena na $[0,1)$.

Posledica je na začetku omenjeni Izrek 0, ki prinese kompletno rešitev Yangovega problema.

Zapišimo ga še enkrat

KOROLAR *Naj bo $N \geq 2$. Obstaja kompletna zaprta kompleksna hiperploskev v B_N.*

Dokaz. Naj bo f funkcija iz Izreka 4. Po Sardovem izreku obstaja konstanta c, za katero je nivojska množica $M = \{z \in B_N \colon f(z) = c\}$ zaprta kompleksna hiperploskev v krogli B_N (skoraj vsaka konstanta c ima to lastnost).

Pokažimo, da je kompletna. Naj bo $p \colon [0,1) \to M$ divergentna pot. To je pot, za katero je $|p(t)| \to 1$ as $t \to 1$. Tedaj je po eni strani $\Re f$ omejena na $p([0,1))$ (enaka $\Re c$), po drugi strani pa je na vsaki divergentni poti končne dolžine v B_N funkcija $\Re f$ neomejena. Torej mora imeti p neskončno dolžino. M je torej kompletna. Q.E.D.

Vprašanje o topologiji dobljene hiperploskve

Zgoraj opisana konstrukcija kompletne zaprte kompleksne hiperploskve v B_N ne da prav nobene informacije o topologiji hiperploskve, ki bi bila v principu lahko zelo komplicirana. Torej je naravno vprašanje če obstajajo take hiperploskve z enostavno topologijo.

V posebnem,

Ali obstaja kompletna prava holomorfna vložitev $f\colon \Delta \longrightarrow B_2$?

O tem vprašanju sem premišljeval vrsto let brez uspeha.

Rezultat Alarcóna in Forstneriča da le kompletno pravo holomorfno imerzijo $f\colon \Delta \to B_2$.

Najti vložitev je mnogo težje, saj so samopresečne točke holomorfnih krivulj v C^2 generične in jih ni mogoče odstraniti z majhnimi perturbacijami. Torej v kakršni koli induktivni konstrukciji v nobenem koraku ne bomo smeli ustvariti samopresečnih točk.

Denimo, da imamo pravo holomorfno vložitev $f\colon \Delta \to B_2$, tako, da $f(\Delta)$ ne seka nobene tangentne krogle iz urejene družine kot zgoraj. Tedaj mora biti taka vložitev kompletna.

Kako priti do take f? Ideja je, da se v konstrukciji izogibamo vedno vetangentnim kroglam iz zgoraj konstruirane urejene družine tangentnih krogel, tako da vzamemo kompleksno premico v C^2 ki poteka skozi koordinatno izhodišče in jo potem induktivno deformiramo tako, da dobimo zaporedje L_n vloženih kopij C-ja, ki se izognejo vedno večjemu številu tangentnih krogel v naši urejeni družini v upanju da bo komponenta limite našega zaporedja $L_n \cap B_2$ naš iskani kompleten disk.
To naredimo z uporabo primernega zaporedja holomorfnih avtomorfizmov prostora C^2, ki se imenujejo **strigi** in ki izgledajo takole:

Preslikavo $\Psi\colon C^2 \to C^2$ ki je po linearni zamenjavi koordinat v C^2 oblike

$$\Psi(z, w) = (z, w + \varphi(z))$$

kjer je φ cela funkcija ene spremenljivke, imenujemo **strig**. Strig Ψ je (holomorfen) avtomorfizem prostora C^2. Če je φ polinom, imenujemo preslikavo Ψ **polinomski strig**.

Naj bo $L \subset C^2$ slika C pri pravi holomorfni vložitvi s C v C^2. Če je Ψ avtomorfizem prostora C^2 tedaj isto velja za $\Psi(L)$.

Z uporabo Propozicije 1 dokažemo

Propozicija 3 *Naj bo $L \subset C^2$ slika C s polinomsko vložitvijo, tako da L vsebuje koordinatno izhodišče. Naj bo T tangentna krogla vsebovana v B_2 in naj bo $K \subset C^2$ kompaktna konveksna množica ki vsebuje izhodišče in se ne seka s T. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinomski strig $\Psi\colon C^2 \to C^2$ tak, da velja*

(i) $\Psi(0) = 0$

(ii) $|\Psi(x) - x| < \varepsilon$ *on* K

(iii) $\Psi(L)$ *ne seka* T.

Orišimo sedaj induktivno konstrukcijo.

Po Lemi 2 obstaja taka urejena družina $\mathcal{T}$ tangentnih krogel vsebovanih v B_N, da ima vsaka pot $p\colon [0,1) \to B_N,\ |p(t)| \to 1$ pri $t \to 1$, ki zgreši vse razen morda končno mnogo krogel $T \in \mathcal{T}$, neskončno dolžino.

Oštevilčimo krogle v $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \{ T_1, T_2, \cdots \}$$

tako da če je za vsak n, c_n središče krogle T_n tedaj je $|c_n|$ naraščajoče zaporedje.
V tipičnem indukcijskem koraku začnemo z L_n, sliko C s polinomsko preslikavo s C v C^2, tako, da L_n vsebuje koordinatno izhodišče in zgreši $T_1 \cup T_2 \cup \cdots T_n$.

Uporabimo Propozicijo 3 da spremenimo L_n s polinomskim strigom Φ_{n+1} ki ohranja izhodišče, ki je zelo blizu identiteti na $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$ in na primerni krogli polmera manj kot $|c_n|$ in je tak, da $L_{n+1} = \Phi_{n+1}(L_n)$ poleg $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$ zgreši tudi T_{n+1}

Za vsak n, naj bo $V_n \subset L_n$ komponenta od $L_n \cap B_2$, ki vsebuje izhodišče.

Po principu maksima je V_n enostavno povezana in zato po Riemannovem upodobitvenem izreku biholomorfno ekvivalentna krogu Δ.

S primerno induktivno izbiro zaporedja avtomorfizmov Φ_n dobimo zaporedje V_n vloženih diskov, takih, da za vsak n, disk V_n zgreši $T_1 \cup \cdots \cup T_n$, in takih, da ko $n \to \infty$ diski konvergirajo k disku V ki ne seka $|\mathcal{T}|$ in ki je s pravo holomorfno preslikavo vložen v B_2.

To dokaže

IZREK 6 *Obstaja kompletna prava holomorfna vložitev* $f\colon \Delta \to B_2$.

To je najbolj enostaven primer splošnejšega rezultata, dokazanega v članku

A. Alarcón, J. Globevnik, F. J. López: A construction of complete complex hypersurfaces in the ball with control on the topology. V tisku v Crelle's Journal, DOI 10.1515/crelle-2016-0061 http://arxiv.org/abs/1509.02283 kjer smo, v posebnem dokazali, da B_2 vsebuje kompletne zaprte kompleksne krivulje s poljubno končno topologijo.

Ob koncu naj omenim še zadnji rezultat v tej smeri: da B_2 vsebuje kompletne s pravo preslikavo vložene kompleksne krivulje poljubnega topološkega tipa:

IZREK 7 *Na vsaki odprti povezani orientabilni gladki ploskvi M obstaja taka kompleksna struktura, da za Riemannovo ploskev M obstaja kompletna prava holomorfna vložitev v B^2.*

(A. Alarcón, J. Globevnik: Complete embedded complex curves in the ball of C^2 can have any topology. Analysis & PDE 10 (2017) 1987-1999)

Naj zaključim z naslednjim preprostim odprtim problemom:

Diskusija zgoraj je pokazala, da B_2 vsebuje kompletne, s pravo holomorfno preslikavo vložene kolobarje.
Vendar pa, ob danem, fiksnem kolobarju $A \subset C$ obstoj take preslikave $f : B^2$ še ni bil dokazan:

VPRAŠANJE *Naj bo $A \subset C$ kolobar. Ali obstaja kompletna prava holomorfna vložitev $f : A \to B_2$?*

ČISTO SVEŽA OPOMBA Pokazali smo, da je kompletno zaprto kompleksno hiperploskev v krogli B_N mogoče konstruirati kot nivojsko množico $\{z \in B_N \colon f(z) = c\}$ holomorfne funkcije f na krogli. Naša funkcija f je bila taka, da je bila za vsak $c \in C$, ki ni kritična vrednost funkcije f, in je zato $\{z \in B_N \colon f(z) = c\}$ kompleksna hiperploskev, ta nivojska množica kompletna hiperploskev.

A. Alarcón pa je pravkar dokazal (prvo predavanje o tem je imel v našem Seminarju za kompleksno analizo prejšnji torek, 16.januarja) da je vsaka kompletna zaprta kompleksna hiperploskev take oblike:

IZREK 8 (A. Alarcón 2018) *Naj bo H kompletna zaprta kompleksna hiperploskev v krogli B_N. Obstaja taka holomorfna funkcija f na B_N, da je $H = \{z \in B_N \colon f(z) = 0\}$ in da je za vsak $c \in f(B_N)$ nivojska množica $H = \{z \in B_N \colon f(z) = c\}$ kompletna kompleksna hiperploskev.*

OPOMBA Današnje predavanje je bilo namenjeno matematikom. Osrednji rezultat, ki sem ga predstavil, je bil uvrščen med najboljše rezultate v Sloveniji na področju naravoslovja in matematike v letu 2016.
Ob tej priliki sem moral pripraviti četrturno predstavitev tega rezultata za nematematike, kar je bila zelo težka naloga. Če koga slučajno zanima, kako se mi je to posrečilo, najde na moji domači strani povezavo na posnetek predstavitve.

Če koga zanima, je tudi pdf datoteka tegale, pravkar končanega predavanja na moji domači strani.

NAJLEPŠA HVALA ZA VAŠO POZORNOST!